

# HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

La geometría (Del griego : γεωμετρία : geo = Tierra, Metria = medida) es el campo del conocimiento dedicado a las relaciones espaciales. Junto a la teoría de números conforma el antecedente más claro de la matemática moderna.

El principal ámbito de aplicación de la geometría clásica fue la construcción de edificios, canalizaciones y la distribución del terreno. La geometría primordial se basaba en una colección de enunciados descubiertos empíricamente en relación con longitudes, ángulos, áreas, y volúmenes de diversos objetos, y que fueron desarrollados para satisfacer necesidades en agrimensura, construcción, astronomía y artesanía. Entre estos principios algunos destacan por ser sorprendentemente sofisticados, hasta el punto de que su justificación ha requerido una compleja elaboración incluso para la matemática y el cálculo modernos.

En la actualidad, los conceptos geométricos han alcanzado un alto nivel de abstracción y complejidad debido a la influencia del cálculo y el álgebra, de modo que la geometría moderna es apenas reconocible como heredera de la antigua.

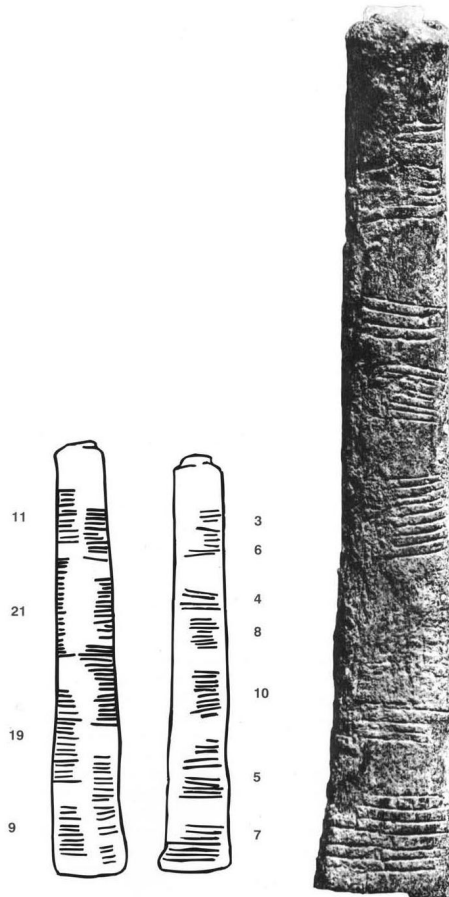
Es razonable pensar que los orígenes de la Geometría se encuentran en los primeros pictogramas del hombre primitivo (prehistoria, + 3300 a. C.), que de esta forma clasificaba inconscientemente los objetos que le rodeaban atendiendo a su forma o dimensiones. En la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento intuitivo e informal a la geometría.

Un pictograma es un signo que representa esquemáticamente un símbolo, objeto real o figura, es el nombre con el que se denomina a los signos de los sistemas alfabéticos basados en dibujos significativos. Son los precursores de los posteriores jeroglíficos en diferentes culturas. Los pictogramas deben ser fácilmente comprensibles y omitir detalles superfluos. Hemos de entenderlos como signos claros y esquemáticos que sintetizan mensajes sobrepasando la barrera del lenguaje con el objetivo de informar y/o señalar.



Ejemplo de pictograma

El desarrollo de la geometría primitiva fue paralelo al de los números y la aritmética. La introducción de los numerales fue un paso decisivo en la abstracción que dejaba atrás las marcas de cuenta utilizadas por los hombres primitivos. Uno de los primeros esfuerzos serios datados se remonta a la antigua Mesopotamia hace 6000 años. A continuación repasaremos sus logros más importantes.



Hueso de Ishango, hace 25.000 años (Zaire)

## 1. Matemáticas en Babilonia.

*Los babilonios tenían un sistema numeral posicional en base 60 que les permitió desarrollar una matemática avanzada. Llegaron a desarrollar el álgebra y la geometría.*

Los babilonios vivieron en Mesopotamia, una fértil llanura entre los ríos Tigris y Éufrates (actual Irak). Las primeras civilizaciones que ocuparon esa tierra se remontan a 5000 años a.C., y su esplendor se extendió hasta los primeros años del cristianismo. Una de las primeras civilizaciones que se instalaron en la región fue la Sumeria, que nació antes de 3500 a.C. Se trataba de una civilización avanzada que construía ciudades y disponía de sistemas de irrigación, administración e incluso servicio postal. Desarrollaron la escritura y contaban de un sistema de numeración sexagesimal, es decir, en base 60. Alrededor de 2300 a. C. los Acadios invadieron Mesopotamia y

sometieron a los Sumerios. Durante algún tiempo la cultura más atrasada de los Acadios se mezcló con la más avanzada de los Sumerios. Los Acadios inventaron el ábaco, una herramienta para contar, y desarrollaron métodos aritméticos no muy avanzados que incluían sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

La civilización Babilonia reemplazó a la Sumeria y Acadia hacia el 2000 a. C.. Eran un pueblo semítico que tras la invasión de Mesopotamia estableció su capital en Babilonia alrededor del 1900 a.C. Heredaron de los sumerios una forma abstracta de escritura basada en símbolos cuneiformes (con forma de cuña). Estos símbolos se imprimían sobre tabletas de arcilla húmeda mediante un punzón en forma de prisma triangular (de ahí la forma cuneiforme), para posteriormente cocerse al sol. Miles de estas tabletas han sobrevivido hasta nuestros días.



Tablilla babilónica

Muchas de estas tabletas versan sobre temas que, aunque no contienen matemáticas profundas, son de todos modos fascinantes. Así por ejemplo, hay tablillas que dan información sobre los sistemas de irrigación de las primeras civilizaciones mesopotámicas. Hay que entender que cavar y mantener los canales era una de las tareas más importantes para los gobernantes de Mesopotamia debido a que éstos eran necesarios tanto para el riego como para el transporte de mercancías y ejércitos. Los gobernantes babilonios ordenaron a los matemáticos de la época calcular el número de trabajadores y días necesarios para la construcción de un canal, y calcular el gasto total en salarios de los trabajadores. Hay varios textos matemáticos de la Antigua Babilonia en los que se informa de diversas cantidades relacionadas con la excavación de un canal. Son las YBC 4666, 7164 y VAT 7528, todas ellas escritas en

Sumerio, y YBC 9874 y BM 85196, Núm. 15, que están escritas en Acadio. Desde el punto de vista matemático estos problemas son relativamente simples.

## 1.1. Numeración y operaciones aritméticas en Babilonia.

Los babilonios tenían un sistema numérico avanzado, en algunos aspectos más avanzado aún que nuestros sistemas actuales. Era un sistema posicional en base 60, en lugar de base 10, que es lo habitual en la actualidad. La razón de la elección de esta numeración hay que buscarla en el hecho de que el número 60 tiene la ventaja de admitir muchos divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60), con lo que se facilita el cálculo con fracciones. De hecho es el número más pequeño que es divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6. El uso del número sesenta como base para la medición de ángulos, coordenadas y medidas de tiempo se vincula también a la vieja astronomía y a la trigonometría. Era común medir el ángulo de elevación de un astro y la trigonometría utiliza triángulos rectángulos.

Dividían el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Esta forma de contar ha sobrevivido durante 4.000 años. Escribir 5h 25' 30", es decir, 5 horas, 25 minutos, 30 segundos, es equivalente a escribir la fracción sexagesimal  $5\frac{25}{60}\frac{30}{3600}$ . Adoptamos la notación 5;25,30 para este número sexagesimal. En notación de base 10 o decimal, el número sexagesimal 5;25,30 es  $5\frac{4}{10}\frac{2}{100}\frac{5}{1000}$ , que se escribe 5,425.

Lógicamente, los símbolos utilizados para escribir los números eran distintos a los nuestros. Usaban T para el 1 y < para el 10, siempre en el sistema sexagesimal. A modo de curiosidad, consúltese la siguiente tabla explicativa:

1	T	11	< T	21	<< T	31	<<< T	41	<<<< T	51	<<<<< T
2	TT	12	< TT	22	<< TT	32	<<< TT	42	<<<< TT	52	<<<<< TT
3	TTT	13	< TTT	23	<< TTT	33	<<< TTT	43	<<<< TTT	53	<<<<< TTT
4	TTT<	14	< TTT<	24	<< TTT<	34	<<< TTT<	44	<<<< TTT<	54	<<<<< TTT<
5	TTT<T	15	< TTT<T	25	<< TTT<T	35	<<< TTT<T	45	<<<< TTT<T	55	<<<<< TTT<T
6	TTT<TT	16	< TTT<TT	26	<< TTT<TT	36	<<< TTT<TT	46	<<<< TTT<TT	56	<<<<< TTT<TT
7	TTT<TTT	17	< TTT<TTT	27	<< TTT<TTT	37	<<< TTT<TTT	47	<<<< TTT<TTT	57	<<<<< TTT<TTT
8	TTT<TTT<	18	< TTT<TTT<	28	<< TTT<TTT<	38	<<< TTT<TTT<	48	<<<< TTT<TTT<	58	<<<<< TTT<TTT<
9	TTT<TTT<T	19	< TTT<TTT<T	29	<< TTT<TTT<T	39	<<< TTT<TTT<T	49	<<<< TTT<TTT<T	59	<<<<< TTT<TTT<T
10	<	20	<<	30	<<<	40	<<<<	50	<<<<<		

Observemos por ejemplo que:

24	$93 = 60 + 30 + 3$	$4103 = 60^2 + 8 \times 60 + 2 \times 10 + 3$
<<TTTT	T<<<TTT	$\begin{array}{ccc} & & TTTT < \\ T & & & TTT \\ & & TTTT < & \end{array}$

Más que profundizar en algoritmos aritméticos para realizar cálculos (sumas, productos, etc), los babilonios construían tablas para facilitar el mismo a modo de “calculadoras” primitivas que proporcionaban el resultado sin explicar el proceso. Dos tabletas halladas en Senkerah en el Eufrates en 1854 datan de 2000 a. C., y contienen los cuadrados de los números hasta el 59 y los cubos de los números hasta el 32. Por ejemplo, en la tableta marcaban  $8^2 = 1,4$ , lo que significa  $8^2 = 1,4 = 1 \times 60 + 4 = 64$ , y así hasta  $59^2 = 58,1$  ( $= 58 \times 60 + 1 = 3481$ ). Los Babilonios usaban la fórmula  $ab = [(a+b)^2 - a^2 - b^2]/2$  para facilitar el cálculo del producto a partir de las tablillas de cuadrados. Aún mejor es esta fórmula  $ab = [(a+b)^2 - (a-b)^2]/4$  que tiene la misma utilidad.

La división es un proceso más complicado. Los babilonios no tenían ningún algoritmo para la división larga. En lugar de ello basaban su método en el hecho de que  $a/b = a \times (1/b)$  de modo que todo sólo era necesaria crear una tabla de inversos. Aún tenemos sus tablas de inversos que alcanzan números hasta varios miles de millones. Por supuesto, estas tablas están escritas con sus numerales cuneiformes, pero usando la notación sexagesimal.

Ahora bien, la tabla tiene huecos ya que  $1/7, 1/11, 1/13$ , etc. no son fracciones finitas en base 60, como nos ocurre a nosotros con decimales periódicos en nuestro sistema decimal. Esto significa que los babilonios el número  $1/13$  simplemente lo aproximaban:

$$1/13 = 7/91 = 7 \times (1/91) = (\text{aprox.}) 7 \times (1/90)$$

y estos valores, por ejemplo  $1/90$ , sí que se dan en las tablas. A modo de ejemplo, en su simbología  $321 \frac{3}{4} = 5 \times 60 + 21 + 45/60$  se escribía como

$$\begin{array}{ccc} TTT < & & << TTT \\ & & T & \\ TT < & & << TT \end{array}$$

Fundamentalmente, estos números decimales eran utilizados en complicados cálculos astronómicos, que reflejaban el movimiento de algunos planetas y servían para la predicción de eclipses.

## 1.2. Geometría y Álgebra en Babilonia.

Los matemáticos babilonios fueron mucho más allá de las operaciones aritméticas, aportando ideas básicas sobre geometría y teoría de números. La geometría babilónica estaba íntimamente ligada a las mediciones prácticas. No había una

diferencia esencial entre la partición de una cierta cantidad de dinero, de acuerdo a ciertas reglas, y la división de un terreno en partes de áreas iguales. Las condiciones exteriores tenían que ser observadas, en un caso eran las condiciones acerca de una herencia; en otras las reglas determinan un área, o las relaciones entre medidas, o los problemas acerca de salarios. La importancia matemática de un problema recaía sobre su solución aritmética, la geometría no era sino una cosa más entre las muchas de la vida diaria, a las cuales era posible aplicarles los métodos aritméticos.

La geometría no era una disciplina especial, sino que era tratada igualmente que a cualquier otra forma de relación numérica entre objetos de uso práctico. Entre los resultados geométricos conocidos en Mesopotamia, se encuentran métodos para calcular el área de un círculo, con muy buenas aproximaciones del número  $\pi$ . (Los babilonios podían además calcular el área de un triángulo y de un trapecio). Los volúmenes de prismas rectos y cilindros los calculaban multiplicando el área de la base por la altura. Tenían fórmulas para determinar el volumen de un tronco de cono y pirámides cuadrangulares truncadas.

Los geómetras babilónicos tenían conocimientos básicos de trigonometría. Estaban familiarizados con el teorema de Pitágoras, y comprendían su principio general. Conocían también el teorema, atribuido a Tales de Mileto, según el cual el ángulo inscrito en un semicírculo es recto. Además, sabían que “los lados correspondientes de dos triángulos rectángulos semejantes son proporcionales”, y que “la perpendicular trazada desde el vértice de un triángulo isósceles divide la base de este triángulo en dos partes iguales”.

En cuanto al álgebra, resolvieron ecuaciones sencillas con aplicación geométrica. Fundamentalmente utilizaban sus tabillas de cálculo para resolver ecuaciones. Por ejemplo, construyeron tablas para  $n^3 + n^2$ ; con la ayuda de las cuales resolvían algunas ecuaciones cúbicas como por ejemplo  $ax^3 + bx^2 = c$ .

Hay que enfatizar de inmediato que estamos usando notación moderna y que en los tiempos babilónicos no existía nada parecido a una representación simbólica. Sin embargo los babilonios podían manejar reglas que resolvían problemas tipo con un método bien definido.

Por ejemplo, en nuestro ejemplo (usando nuestra notación) multiplicarían la ecuación por  $a^2$  y la dividirían por  $b^3$  para obtener  $(ax/b)^3 + (ax/b)^2 = ca^2/b^3$ . Tomando  $y = ax/b$  se obtiene la ecuación  $y^3 + y^2 = ca^2/b^3$  que podría resolverse buscando en la tabla de  $n^3 + n^2$  el valor de  $n$  que satisface  $n^3 + n^2 = ca^2/b^3$ . Una vez hallada la solución para  $y$ , se hallaba la  $x$  haciendo  $x = by/a$ . Hacemos de nuevo hincapié en que todo esto se hacía sin notación algebraica, lo que demostraba una comprensión de notable profundidad. Una vez más, mirarían otra tabla para resolver la ecuación lineal  $ax=b$ . Consultarían la tabla de  $1/n$  para hallar  $1/a$  y después multiplicar el número sexagesimal obtenido en la tabla por  $b$ .

Para resolver una ecuación cuadrática los babilonios básicamente usaban la fórmula estándar. Consideraban dos tipos de ecuaciones cuadráticas, a saber:  $x^2 + bx = c$  y  $x^2 - bx = c$  donde  $b, c$  son positivos, pero no necesariamente enteros. La forma de sus soluciones eran, respectivamente  $x = [(b/2)^2 + c]^{1/2} - (b/2)$  y  $x = [(b/2)^2 + c]^{1/2} + (b/2)$ . Hay que notar que en cada caso se da la raíz positiva de las dos raíces de la ecuación

cuadrática, que es la que tendría sentido en la resolución de problemas 'reales'. Por ejemplo, los problemas que llevaban a los babilonios a estas ecuaciones a menudo se referían al área de un rectángulo. Por ejemplo si se da el área y la cantidad en que la longitud supera al ancho, entonces el ancho cumple una ecuación cuadrática, y aplicarían la primera versión de la fórmula descrita anteriormente.

Si los problemas relacionados con el área de los rectángulos llevan a ecuaciones cuadráticas, entonces los problemas relacionados con el volumen de una excavación rectangular (un 'sótano') llevan a ecuaciones cúbicas. La tableta de arcilla BM 85200+, que contiene 36 problemas de este tipo, es el primer intento conocido de plantear y resolver ecuaciones cúbicas. Por supuesto, los babilonios no llegaron a descubrir una fórmula genérica para resolver ecuaciones cúbicas. Esta no se encontraría hasta tres mil años después.

(Texto extraído en parte de un artículo de: *J. J. O'Connor* y *E. F. Robertson*, [www.astroseti.org/articulo/3625/](http://www.astroseti.org/articulo/3625/))

## 2. Geometría en el Antiguo Egipto

(Fuente <http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/>)

Cuando hablamos de matemática egipcia, y más extensamente de ciencia egipcia, incluyendo todas sus ramas, debemos antes de nada hacer notar que a diferencia de la matemática babilónica o más tarde la griega, la egipcia es ante todo una matemática empírica. Si hay algo que caracteriza la ciencia del Antiguo Egipto es que se enseñaba a los escribas de la misma forma que durante siglos se había aprendido. No existen demostraciones de los métodos que se emplean, ni siquiera conocemos el origen de las fórmulas. Lo más que podemos ver son comprobaciones, pero nunca una demostración.

Los conocimientos que tenemos sobre la Matemática egipcia se basan en 2 documentos: el papiro de Moscú, y el papiro Rhind. El primero se encuentra en un museo de la ciudad de Moscú y el segundo en el Museo Británico de Londres. Este último debe su nombre al anticuario escocés Henry Rhind. Los papiros están compuestos de planteamientos de problemas y su resolución. En el papiro de Moscú tenemos 25 y 87 en el papiro Rhind. Es de suponer que ambos tenían una intención puramente pedagógica, con ejemplos de resolución de problemas triviales. Los papiros datan del año 1650 a.C. (Rhind) y 1800 a.C. (Moscú), pero los conocimientos



que en ellos aparecen bien podrían fecharse en torno al año 3000 a.C. El papiro Rhind es también conocido como papiro de Ahmes, escriba autor de la obra y comienza con la frase: "Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios". El papiro de Moscú es de autor desconocido. Otras fuentes complementarias son el rollo de cuero, con 26 operaciones de sumas de fracciones de numerador 1, y los de Kahun, Berlín, Reiner y Ajmin.



Papiro Amhes (izqda.) y Rhind (dcha): Reglas para estudiar la naturaleza y para comprender todo lo que existe, todo misterio, todo secreto.

Como en todos los aspectos cotidianos, los egipcios fueron fieles a sus tradiciones, y la evolución producida a lo largo de 2000 ó 3000 años fue mínima. En matemáticas los conocimientos demostrados a mediados del primer milenio eran posiblemente los mismos que en el tercer milenio. Las operaciones se realizaban de una determinada forma porque siempre se había hecho así. Los antiguos métodos de sumas, divisiones o resolución de ecuaciones simples se seguían empleando durante el Reino Nuevo y hasta la llegada de la matemática griega. La sociedad egipcia destacó más por su matiz místico o religioso que por los avances científicos.

Ciertamente sobre la base de los 2 papiros más importantes de matemáticas no podemos sacar unas conclusiones claras de los conocimientos reales de los escribas egipcios en cuestiones de cálculo. Ya hemos dicho que los papiros tenían una intención puramente pedagógica muy básica. Estaban básicamente destinados a la enseñanza de contabilidad y cálculo a los funcionarios del estado, y no es para nada una obra de conocimientos matemáticos. De ellos no podemos extraer más que conocimientos básicos de matemáticas. No sabemos si realmente los egipcios conocían sistemas más avanzados de cálculo, pero sí que la base de sus matemáticas era bastante árida. Como veremos, los métodos empleados para el cálculo de sumas de fracciones o multiplicaciones básicas no eran para nada sencillos. No se puede afirmar que los conocimientos matemáticos egipcios se cerrasen con lo que aquí vamos a explicar, o lo que aparece en el papiro Rhind, pero tampoco tenemos










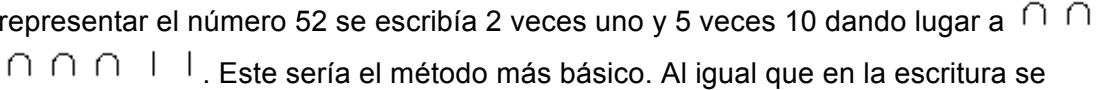
pruebas de que fuesen más allá ni de que existiesen otros sistemas, si bien es cierto que posiblemente los arquitectos y personal especializado si utilizarasen métodos diferentes.

En el papiro Rhind tenemos operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números enteros y fracciones, potencias, raíces cuadradas, resolución de ecuaciones con una incógnita, cálculos de áreas de triángulos y trapecios y de algunos volúmenes. Los métodos se usaban tal y como durante generaciones se habían aprendido. Existía una fórmula para el cálculo de ciertas áreas o volúmenes igual que tenían un método para sumar o restar, pero esa fórmula cometía los mismos errores de precisión que 1000 años antes y nadie se debió molestar en encontrar otra más precisa. El cálculo de la superficie del círculo se realizaba como el cuadrado de  $\frac{8}{9}$  del diámetro. Si consideramos un círculo de radio 100 obtendríamos un valor de la superficie de 7901.23. Esto nos daría un valor de  $\pi$  de 3.160492, próximo al  $\pi = 3.1415926\dots$  El valor obtenido por los egipcios es realmente cercano, el error cometido es aproximadamente 2 centésimas (3.1625) aunque es poco probable que los egipcios conociesen el número Pi. Tenían un método que empleaban para calcular la superficie del círculo basado en aproximaciones por superficies más sencillas.

## 2.1. Representación de números cardinales

Los egipcios utilizaban para sus cálculos el sistema decimal, probablemente por razones antropomórficas (las manos de un ser humano tienen diez dedos). Tenían 7 símbolos básicos que representaban las unidades, decenas, centenas, etc. Los símbolos empleados para la numeración fueron los siguientes:

	1
	10
	100
	1.000
	10.000
	100.000
	1.000.000, infinito

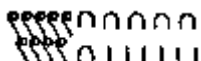
Para representar un número se incluían estos símbolos escribiéndolos, normalmente de derecha a izquierda, y representando tantos de cada uno como unidades tuviese el número. El sistema es en base 10 pero no es posicional, sino aditivo. Así, para representar el número 52 se escribía 2 veces uno y 5 veces 10 dando lugar a . Este sería el método más básico. Al igual que en la escritura se intentaba obtener una mejor representación gráfica, por lo que un número como 2235 nunca se escribiría



sino



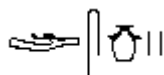
Vemos como incluso en la escritura de números se complica la transliteración precisamente por ese intento de que las representaciones fuesen lo más estéticas posibles. Si encontramos una representación del tipo:



sería 966. Cuando aparece más de un símbolo cardinal el conjunto debe leerse de arriba a abajo.

El jeroglífico empleado para un millón se utilizaba, también, para designar el concepto de infinito o mucho. Éste pronto cayó en desuso y se empleó otro método, consistente en representar el número como una serie de operaciones aritméticas (sumas y multiplicaciones) de valores inferiores.

Cuando el número a representar va seguido de un sustantivo se escribía primero el símbolo correspondiente al nombre y luego el número (en transcripciones se escriben los números 1 y 2 detrás del nombre y el resto antes que este). Así para representar 2 jarras emplearíamos (leyendo de izquierda a derecha):



El nombre puede aparecer en su forma singular o plural, pero nunca si el número es 1 ó 2, o si se refiere a indicaciones de tiempo o medida. En estos casos aparece, como regla general, en singular.

Hemos visto la representación jeroglífica de los números cardinales. La escritura hierática y la demótica diferían bastante de la jeroglífica. En este caso el sistema ya no es aditivo, sino que se trata de un sistema numeral codificado, que incluye símbolos para las primeras 9 unidades, 9 decenas, 9 centenas, etc. En la siguiente tabla se da una relación desde el 1 al 9000:

1	𐎍	100	𐎏
2	𐎎	200	𐎐
3	𐎌	300	𐎑
4	𐎍	400	𐎒
5	𐎎	500	𐎓
6	𐎌	600	𐎔
7	𐎍	700	𐎕
8	𐎎	800	𐎖
9	𐎌	900	𐎗
10	𐎏	1000	𐎘
20	𐎐	2000	𐎙
30	𐎑	3000	𐎚
40	𐎒	4000	𐎛
50	𐎓	5000	𐎜
60	𐎔	6000	𐎝
70	𐎕	7000	𐎞
80	𐎖	8000	𐎟
90	𐎗	9000	𐎠

Para representar el número 5417, en hierática obtendríamos (leyendo de derecha a izquierda):

𐎜 𐎏 𐎓 𐎛<sup>𐎛</sup>𐎛<sup>𐎛</sup>

7 1 4 5

También disponían de una simbología para los números ordinales (primero, segundo,...), que omitiremos.

Ver por ejemplo <http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/> para más detalles.

## 2.2. Aritmética y operaciones básicas.

Como hemos explicado antes, las matemáticas egipcias se basaban en un sistema decimal, pero no posicional, como el nuestro, sino aditivo. Las operaciones básicas de suma y resta se limitaban a una combinación o cancelación de símbolos.

La adición era la base del conocimiento matemático, puesto que las operaciones de multiplicación y división se basaban en adiciones.

Para sumar simplemente se añadían los símbolos correspondientes. Como los símbolos se podían repetir desde 1 a 9 veces, si se excedía de 9 se eliminaban todos y se añadía el siguiente. El funcionamiento es similar al ábaco. Así:

$$\overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} | | | | | | | | + \overset{\circ}{\circ} | | | | | = \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} | | | | | | | | | | | |$$

Al obtener 11 símbolos  $|$  no hay más que eliminar 10 y añadir el equivalente ( $\overset{\circ}{\circ}$ ) obteniendo:

$$\begin{array}{c} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} | \\ \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} \end{array}$$

Como se ve el sistema es bastante trivial. Para la resta sencillamente se eliminaban los símbolos a restar. El funcionamiento es exactamente el mismo que el de un ábaco chino, pero en lugar de con columnas, con símbolos.

Las operaciones de multiplicación y división se basaban en el mismo proceso aditivo. Para multiplicar se empleaba un sistema de duplicación-adición, que requiere un poco de práctica. Se basa en la propiedad de que cualquier número natural puede expresarse como una suma de potencias de 2, que quizás los egipcios ya hubiesen descubierto por métodos empíricos. Si queremos multiplicar por ejemplo  $n \times m$ , el sistema es el siguiente:

- Se escribe una tabla de 2 columnas por n filas. Cada fila se obtiene por duplicación de la anterior. Si se quiere multiplicar  $n \times m$  la primera fila consta del número 1 y m. La segunda se compondrá del 2 y  $2 \times m$ . La tabla se construye hasta que el siguiente valor es mayor que n, entonces se puede obtener el número n como suma de todos o parte de los números de la primera columna. El resultado de la operación  $n \times m$  es la suma de todos los miembros de la segunda columna o de los equivalentes a los que suman n en la primera columna. Por ejemplo para multiplicar  $n \times m$  se escribirá:

1	m
2	$m1=2 \times m$
4	$m2=2 \times m1$
8	$m3=2 \times m2$
..	.....
$2^{**i}$	$mi=2^{*m}(i-1)$

La tabla continúa hasta que el siguiente valor es mayor que n, es decir  $2^{**m}(i+1) > n$ . Una vez hecho esto se trata de descomponer el número n como suma de j-números de la primera columna, de manera que el número de sumandos sea el menor posible. Para conseguirlo se resta al valor n el último obtenido, y a este resultado el mayor posible de la tabla, y así sucesivamente hasta obtener el 0. El resultado de la multiplicación será entonces la suma de los elementos de la segunda columna equivalentes a los de la primera que suman n. Como ejemplo el papiro Rhind recomienda que para multiplicar  $41 \times 59$  se realicen las siguientes operaciones:

1.- Se construye la tabla:



1 3

2 6

4 12

Al igual que en la multiplicación el siguiente número sería 8 y correspondería a 24 que es mayor que 21. Por tanto no se sigue con la tabla. Si el número 21 se puede obtener como suma de los valores de la columna de la derecha, entonces ya está. En este caso

$$12 + 6 + 3 = 21 \rightarrow 21 / 3 = 4 + 2 + 1 = 7$$

Este ejemplo es el más sencillo, pues la división es entera. El problema surgía cuando no se obtenían divisiones enteras y había que utilizar fracciones. Como veremos en el capítulo siguiente el uso de fracciones se basaba en la reducción a fracciones de numerador 1. Para dividir  $21 / 6$  se ejecutaba el mismo proceso anterior, pero cuando se obtiene un número mayor que el numerador, si este no se puede obtener como suma de valores de la columna de la derecha, se continúa la tabla, dividiendo por 2.

1 6

2 12

1/2 3 (\*)

$$6 + 12 + 3 = 21 \rightarrow 21/6 = 1+2+1/2 = 3.5$$

(\*) Ahora ya no tiene sentido poner 4--->24 porque  $24 > 21$ . Tampoco se puede obtener el valor 21 como suma de valores de la columna de la derecha; por tanto se continúa con divisiones ( $1/2, 1/4, \dots$ ).

Lógicamente el tema se puede complicar bastante más. ¿Qué pasa si llegamos a un punto en el que no tenemos números enteros en la columna de la derecha?. En el capítulo referente a fracciones se explica la representación y los métodos empleados para realizar operaciones aritméticas con fracciones que pueden aclarar este punto. Por ahora simplemente vamos a emplear estos métodos para realizar la división  $100 / 13$ . El problema es el número 65 del papiro Ahmes que se resuelve de la siguiente forma.

1.- Obtenemos la tabla inicial

1 13

2 26

4 52

2/3 8 + 2/3


1/13 1

1/39 1/3

$$2.- 13 + 26 + 52 + 8 + 2/3 + 1/3 = 100 \rightarrow 100/13 = 1 + 2 + 4 + 2/3 + 1/39$$

Como puede apreciarse el mayor problema lo representa la elección de los números. Si empleamos el método de la duplicación llegamos a un punto en el que no podemos continuar y aquí es donde se presenta el problema. ¿Qué número elegir? Los escribas no dejaban constancia de los procedimientos intermedios que seguían, pero debieron emplear un método para seleccionar los números. Si analizamos la resolución advertimos que el uso de 1/3 es innecesario, sin embargo el escriba lo emplea, ¿por qué?. Hemos visto que se emplean números enteros innecesarios para seguir un método, el de duplicación. El empleo de fracciones innecesarias nos lleva a pensar que efectivamente se empleaba un método para seleccionar los números, pero desgraciadamente hoy por hoy lo desconocemos.

### 2.3. Fracciones.


El uso de fracciones es sin duda el rasgo más peculiar de la matemática egipcia. El método empleado por los escribas para operar con fracciones es mucho más complicado que el nuestro. La base de la representación de una fracción se encontraba en la descomposición como suma de fracciones de numerador 1, todas distintas. En la representación de fracciones se empleaba el símbolo  (r) que en hierática se convirtió en un punto, y que significaba "parte". Cuando se quería escribir un valor fraccionario, se representaba el símbolo anterior seguido por el valor numérico del denominador.

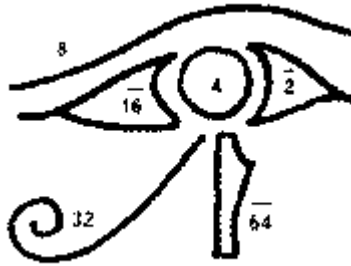
$$\begin{array}{c} \text{○} \\ \text{|||} \\ \text{||} \end{array} = 1/5 \text{ (jeroglífica)} \quad \text{⋈} = 1/5 \text{ (Hierática)}$$

y tenía el sentido de un ordinal, nunca de un cardinal. Se traduciría, literalmente, como "parte 5". Las únicas excepciones eran 1/2, 2/3, 1/4 y 3/4, que se representaban con un jeroglífico especial:



respectivamente. Así como los signos para 1/2, 2/3 y 1/4 si son frecuentes, raramente se empleó el de 3/4. En aritmética sólo se usaba la fracción 2/3, que en hierática se

representaba como . Era muy frecuente el uso de las fracciones denominadas "fracciones ojo de Horus", que representaban cada una de las partes en las que fue seccionado el ojo de Horus durante su batalla con Seth.



Las cejas equivalían a  $1/8$ , la pupila  $1/4$ , la parte izquierda de la pupila  $1/16$ , la parte derecha de la pupila  $1/2$ , la parte inferior vertical bajo el ojo  $1/32$  y la parte inferior diagonal del ojo representaba  $1/64$ .

Las fracciones con numerador distinto de 1 se reducían a sumas de fracciones conocidas, con numerador 1, pero siempre los sumandos tenían que ser diferentes. Así Ahmes en el papiro Rhind escribe  $2/5$  como  $1/3 + 1/15$  y nunca se podría emplear  $1/5 + 1/5$ . La propia expresión  $2/5$  no tenía sentido en el pensamiento egipcio. Cualquier cantidad se expresaba como una parte entera mas una suma de fracciones unitarias, y a lo sumo  $2/3$ . El símbolo "+" no se empleaba y las fracciones aparecían secuencialmente. Lógicamente el problema era encontrar estas reducciones. Actualmente conocemos y podemos encontrar algoritmos de cálculo que nos permiten tales adiciones, pero hace 4000 años los escribas no conocían un método rápido para efectuar las transformaciones, por lo que se limitaban a emplear tablas ya escritas o a efectuar el proceso de división aprendido. Cuando un egipcio se encontraba con una fracción  $5/8$  no pensaba ¿cómo puedo transformar  $5/8$  en una suma de fracciones unitarias?, sino que se limitaba a dividir 5 entre 8 utilizando la técnica usual de este tipo de fracciones

El papiro Rhind incluye, al principio, una tabla en la que se expresan todas las fracciones de numerador 2 y denominador impar entre 5 y 101 como suma de fracciones unitarias. Como es lógico se eliminan las descomposiciones en las que el denominador es par. La siguiente tabla es una reproducción de la escrita por Ahmes. En la primera y tercera columna aparecen los denominadores de las fracciones  $2/n$  y en la segunda y cuarta las fracciones unitarias cuya suma da  $2/n$ .

5	3,15	53	30,318,795
7	4,28	55	30,330
9	6,18	57	38,114
11	6,66	59	36,236,531
13	8,52,104	61	4,244,488,610
15	10,30	63	42,126
17	12,51,68	65	39,195



19	12,76,114	67	40,335,536
21	14,42	69	46,138
23	12,276	71	40,568,710
25	15,75	73	60,219,292,365
27	18,54	75	50,150
29	24,58,174,232	77	44,308
31	20,124,155	79	60,237,316,790
33	22,66	81	54,162
35	30,42	83	60,332,415,498
37	24,111,296	85	51,255
39	26,78	87	58,174
41	24,246,328	89	60,356,534,890
43	42,86,129,301	91	70,130
45	30,90	93	62,186
47	30,141,470	95	60,380,570
49	28,196	97	56,679,776
51	34,102	99	66,198
		101	101,202,303,606

Para expresar 2/61 la tabla da el siguiente valor:

$$\frac{2}{61} = \frac{1}{4} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$$

Hemos visto en el apartado dedicado a la aritmética el procedimiento empleado en la división. Si ahora intentamos dividir 3200 entre 365 siguiendo este método de duplicidad o división por 2 llegamos a un punto en el que necesitamos el conocimiento de fracciones para poder obtener un resultado. Siguiendo el método de la división obtenemos:

2	730
4	1460
8	2920
2/3	243 1/3
1/10	36 1/2
1/2190	1/6

Entonces  $3200/365 = 8 + 2/3 + 1/10 + 1/2190$ , puesto que  $2920 + 243 + 1/3 + 36 + 1/2 + 1/6 = 3200$ .

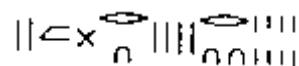
Estos métodos no nos resuelven todas las divisiones que se nos pueden plantear en la vida cotidiana, porque es obvio que los egipcios en algún momento se encontraron con los números irracionales, y en tal caso debían aproximarlos. Quizás también aproximasen en el caso de operaciones extremadamente largas o complicadas.

Es interesante preguntarse por qué usaban los egipcios las fracciones unitarias en sus cálculos. Realmente es difícil suponer una aritmética basada en fracciones unitarias hoy en día. Actualmente el concepto  $3/5$  nos es familiar, pero para los egipcios esto parecía representar un problema. Se han dado diferentes teorías para justificar el uso de este tipo de fracciones en Egipto. En matemática moderna se emplea el uso de fracciones unitarias en determinadas situaciones, y el argumento más convincente para el empleo por parte de los egipcios es la facilidad de dividir un todo en  $n$  partes. Si tenemos 3 panes y queremos dividirlos entre 5 personas, nosotros aceptamos que a cada persona le corresponde exactamente  $3/5$  del total, pero si aplicamos el método de fracciones unitarias a  $3/5$  obtenemos  $3/5 = 1/3 + 1/5 + 1/15$  por lo que para empezar podemos dividir un pan en tres partes iguales, los otros 2 en 5 partes y luego cada una de las 5 partes de uno de estos últimos la dividimos a su vez en 3 partes. Este concepto es más sencillo para un niño que fácilmente aprende a dividir un todo en  $n$  partes iguales y tomar una de ellas que un intento de aplicar  $3/5$  directamente o bien como suma de  $2/5 + 1/5$ .

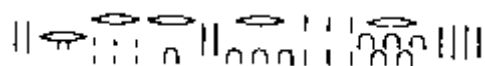
Por último damos a continuación 3 ejemplos de sumas de fracciones del papiro Rhind, extraídos del libro "Egyptian Grammar" de Sir Alan Gardiner



$$5 + 1/2 + 1/7 + 1/14 = 5 + 5/7$$



$$2 + 1/2 + 1/4 + 1/14 + 1/28 = 2 + 6/7$$



$$2 + 2/3 + 1/6 + 1/12 + 1/36 + 1/54 = 2 + 26/27$$

En la descripción de los problemas del papiro Rhind pueden verse más ejemplos de problemas con fracciones.

Los egipcios también trataron la aritmética con fracciones (suma, resta, producto, división). Los problemas 7 al 20 del papiro Rhind se refieren a estas operaciones.

## 2.4. El Álgebra

En los papiros que se conservan con problemas matemáticos existe un grupo que podríamos incluir dentro del concepto de álgebra actual. El egipcio no distinguía entre problemas meramente aritméticos y estos en los que se pide resolver ecuaciones lineales de la forma  $x + ax = b$  o  $x + ax + bx = c$ . Para él todo eran matemáticas y se limitaba a seguir procedimientos aritméticos. Por supuesto no se empleaba esta notación que usamos nosotros sino que se pedía por ejemplo buscar un número, que ellos llamaban "aha" o "montón" tal que ... El problema más conocido del papiro Rhind sobre estas cuestiones es el número 24 en el que se pide calcular el valor del aha si el aha y una séptima parte del aha es 19. Este tipo de problemas aparecen resueltos con unas someras instrucciones que llevan al resultado buscado, sin dar ninguna explicación sobre por qué usar el procedimiento.

La resolución de estos problemas se efectúa por el método que hoy conocemos como "regla de la falsa posición" o "regula falsi". Este método consiste en presuponer un valor para el aha y efectuar las operaciones de la ecuación. A menos que tengas mucha suerte no acertarás con el valor del aha a la primera, pero tampoco importa, porque una vez efectuadas las operaciones se compara el resultado con el que debería obtenerse y con el uso de proporciones se halla el valor correcto.

Por ejemplo en el problema 24 hay que resolver la ecuación  $x + x/7 = 19$ . Se supone un valor  $x = 7$  (el más fácil de aplicar)  $\rightarrow x + x/7 = 8$ . Ahora basta con calcular un número  $n$  tal que  $19 = 8 \cdot n$ , y el valor buscado será  $x = 7 \cdot n$ . Se divide  $19/8$ .

Los problemas de ecuaciones lineales son frecuentes en la matemática egipcia y aparecen en varios papiros, pero llaman la atención especialmente dos problemas del papiro de Berlín que representan un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas, una de las cuales es además de segundo grado. Estos problemas son los más sencillos, del tipo  $ax^2 = b$  o incluso en el de dos incógnitas una de ellas se da en función de la otra, con lo que el problema queda reducido igualmente a uno del tipo  $ax^2 = b$ . Curiosamente se utiliza la raíz cuadrada para resolver el problema, aunque no tenemos constancia de si tenían procedimientos para calcularlas. Algunos autores suponen que debieron existir tablas de números cuadrados, calculadas por un simple procedimiento de multiplicación del número por él mismo, y que podrían leerse en ambos sentidos de modo que permitirían calcular raíces cuadradas. Lo que sí sabemos es que existía un símbolo especial para representarla (  $\Gamma$  ) conocido como 'la esquina'. El problema al que antes nos hemos referido consiste en resolver:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 100 \\ y &= (1/2 + 1/4)x\end{aligned}$$

El método para resolver repartos proporcionales está basado en las propiedades de las proporciones numéricas. Estos cálculos eran muy importantes a la hora de distribuir las raciones, por ejemplo, en los templos, donde no todo el mundo recibía la misma cantidad de comida y bebida.

La regla de 3 aparece en el problema 72 del papiro Ahmes. Los egipcios no encontraban diferencia entre la aplicación de este método para la resolución de problemas y la aritmética. Empleaban el procedimiento cuando los problemas se presentaban de forma similar a prácticas que habían realizado, pero posiblemente el concepto de regla de 3 se les escapase totalmente.

Las progresiones aritméticas aparecen reflejadas en el problema 64 del papiro. No sabemos si la resolución responde a la aplicación de una fórmula o simplemente a planteamientos lógicos, pero como puede verse en el capítulo dedicado al papiro Rhind el escriba sigue perfectamente el método que emplearíamos actualmente para resolver el problema.

## 2.5. Geometría: cálculo de áreas

La Geometría en el Antiguo Egipto tuvo gran importancia a tenor de los escritos de los historiadores griegos Herodoto, Estrabón y Diodoro, quienes incluso atribuían a los egipcios el nacimiento de esta ciencia. Con posterioridad éstos se la transmitieron a los griegos. Estos historiadores nos relataron que los conocimientos egipcios sobre geometría –así como los de las culturas mesopotámicas– pasaron íntegramente a los griegos a través de Tales de Mileto, los pitagóricos, y Euclides.

Las inundaciones provocadas por el Nilo en el antiguo Egipto obligaban a los agrimensores o "tensadores de cuerda", como los llamó Heródoto, a recalcular las lindes de los campos año tras año. Por tanto, y desde muy antiguo, tuvieron que resolver problemas de medición de la tierra, esto es, de *geometría* (*γεωμετρία*), imprescindibles en una sociedad compleja que contaba con una nutrida corte de registradores. Los egipcios se enfrentaron al cálculo del área de cuadriláteros y triángulos, y alcanzaron una buena aproximación al cálculo del área del círculo.

Después de contemplar las grandes construcciones llevadas a cabo por los egipcios, deberíamos esperar una geometría muy avanzada. Pero desgraciadamente no hay constancia de ello, y las únicas fuentes que podemos analizar son el papiro Ahmes y el papiro de Moscú. Con los datos que tenemos en estos 2 papiros no descubrimos aspectos especiales de la geometría y lo único que nos aportan son algunos datos para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas muy básicas. Los cálculos, aunque no correctos, si son lo suficientemente aproximados para cubrir las necesidades de la vida cotidiana. Además no existe distinción entre los cálculos exactos y los aproximados por lo que no sabemos si pensar que consideraban todos como exactos o sencillamente que no se planteaban el error cometido. Como veremos algunos de estos errores son realmente importantes.

En primer lugar hay que tener en cuenta que hasta la llegada de los griegos, al igual que en Babilonia, no existía una división entre la geometría y la aritmética, o la

matemática en general, y todas las ramas se englobaban dentro de una misma, limitándose a aplicar la aritmética al cálculo de áreas, volúmenes y algún otro problema geométrico. A pesar de que, según Heródoto y como hemos comentado antes, la geometría se desarrolló ante la necesidad de recalculer las lindes tras la inundación del Nilo, no parece del todo claro que fuese exactamente así. Indudablemente ésta era una de las aplicaciones más importantes pero desde luego no la única. Los babilonios por ejemplo tenían una geometría muy similar a la desarrollada en Egipto y sin embargo no tenían esa necesidad de agrimensura.

Llama la atención el hecho de haber encontrado inscripciones en las que se calcula el área de figuras cuadrangulares, pertenecientes a campos de cultivo, en las que el método empleado es muy erróneo, y únicamente aproximado en el caso de campos que se tienden a formas rectangulares. En los muros del templo de Edfú aparece este método, que consistía en obtener el área de la figura multiplicando entre sí las semisumas de las longitudes de lados opuestos. Se dice que para calcular el área de un campo de lados a, b, c y d siendo a, b y c, d los lados opuestos se siga la regla

$$A = (a+b)/2 \times (c+d)/2$$

Lógicamente esta fórmula es exacta para figuras rectangulares, pero cuanto más irregular sea la figura más error se comete. Incluso se utiliza para campos triangulares, en los que se afirma que debe tomarse el lado "d" como "nada". Como puede apreciarse no se puede afirmar que tuviesen una geometría muy avanzada pues todo se basa en aproximaciones muy groseras a las fórmulas reales.

En el papiro Ahmes vemos que el cálculo de áreas tendía a emplear la conversión de la figura a analizar en "algo parecido a una figura conocida" que permita llegar al área buscada. Un sistema de cálculos parciales cuya suma permita obtener el área de la figura inicial. Veremos este método en el cálculo del área del círculo. Es quizá un primer paso hacia la demostración geométrica y un intento de encontrar las relaciones mutuas entre figuras geométricas, pero que se quedó ahí, en un primer paso, y al que nunca se le ha dado la importancia que tiene. Por este método se justifica el cálculo del área de un triángulo isósceles. Según Ahmes debe dividirse la mitad de la base y multiplicar el resultado por la altura. Como es lógico el escriba no emplea los términos base, altura o isósceles para expresarse, pero por la figura y la explicación que da debemos pensar que se trata de un triángulo isósceles. Ahmes justifica este cálculo afirmando que puede considerarse el triángulo formado por 2 triángulos rectángulos, de manera que el desplazamiento de uno de ellos da lugar a un rectángulo con lados de la misma longitud que el triángulo de partida. Curiosamente Ahmes describe el triángulo como "un pedazo de tierra de una cierta anchura en un extremo y que llega a un punto". Realmente resulta difícil que con una definición así se pueda determinar el área de la figura. Cuando Ahmes habla de altura no emplea más que un término genérico llamado "línea", afirmando que debe multiplicarse la base por



la "línea". No tenemos claro si el escriba quería referirse, con este término, a la altura del triángulo o a un lado, aunque, por los cálculos que aparecen en otros problemas, parece más bien este último caso. Pero hay que plantearse qué se podía considerar base y qué lado. El error es grande si consideramos un triángulo isósceles, pero en el caso de triángulos con todos los lados diferentes el cálculo se complicaba.

El problema 52 del mismo papiro trata sobre el área de un trapecio isósceles de base mayor 6, base menor 4 y distancia 20. Para resolverlo toma la semisuma de las bases "de forma que se transforme en un rectángulo" y lo multiplica por la distancia 20.

Es quizá el cálculo del área del círculo la parte de la geometría egipcia de la que más se ha escrito, sin duda por el misterio que rodea al número  $\pi$ . Según el papiro Rhind (problema número 50) Ahmes acepta que el área de un círculo de diámetro 9 es la misma que la de un cuadrado de lado 8. Esto nos lleva a aceptar un valor para  $\pi$  de 3.1605. Esta es una muy buena aproximación del valor real de 3.1415926..., que siempre ha llamado la atención. Se ha dicho que los egipcios conocían el valor de  $\pi$ , pero lo cierto es que aunque la aproximación no es mala, es un valor calculado en base a una geometría muy básica. Además hay que tener en cuenta que los egipcios no empleaban  $\pi$  como una constante. No sabemos cómo se llegó a esta aproximación, pero se ha considerado que el problema 48 del mismo papiro puede ser la respuesta. En este vemos que Ahmes construye un octógono a partir del cuadrado de lado 9 unidades, dividiendo cada lado en 3 partes y uniendo las esquinas, es decir anulando los 4 triángulos formados en las esquinas. Entonces el área del octógono es aproximada al área del círculo de diámetro 9.

Posiblemente mayor importancia que la buena aproximación de  $\pi$  tenga la afirmación egipcia de las relaciones entre área y perímetro del círculo y el cuadrado. Según los egipcios la relación entre el área de un círculo y su circunferencia es la misma que la razón entre el área y el perímetro del cuadrado circunscrito. Sin duda esta afirmación es mucho más importante geoméricamente hablando que la aproximación de  $\pi$ , si bien es cierto que muchos autores han destacado esta aproximación de  $\pi$  para afirmar que los egipcios conocían una matemática "oculta" mucho más desarrollada que la que actualmente aceptamos de las escasas fuentes que poseemos. En muchas ocasiones se ha tratado de crear leyendas en torno a las relaciones geométricas de la gran pirámide. Quizá la más llamativa y conocida es la que afirma que el perímetro de la base se planeó de manera que coincidiese con la circunferencia cuyo radio es la altura de la pirámide. Esta relación es efectivamente cierta, con una muy buena aproximación, para un valor de  $\pi$  de 3.14, pues la razón del perímetro a la altura es de  $44/7 = 2 \times 22/7$ , que nos da un valor para  $\pi$  de 3.14 y no el valor 3.16 que sabemos que empleaban, aunque esta última afirmación tampoco podemos tomarla al pie de la letra puesto que no parece que empleasen  $\pi$  como una constante y posiblemente el propio concepto y su relación con el círculo les era totalmente desconocido, ya que no lo aplicaban por ejemplo al calcular el volumen de un cilindro.

También disponemos de información de las reglas empleadas para el cálculo de volúmenes del cubo, paralelepípedo, cilindro y figuras sencillas. En algunos casos estos métodos conducen a aproximaciones, pero en otros los cálculos son correctos. Los papiros dan como fórmula para calcular el volumen de un tronco de cono de altura  $h$  y circunferencias  $D$  y  $d$ :

$$V = h/12 [3/2(D+d)]^2$$

Lógicamente no existe en los papiros una formulación así, sino que se explica con un ejemplo en el que se dice "Divide 18 entre 12, suma 7 y 4 .... ). Este método supone emplear un valor de  $\pi$  de 3, frente al 3.1605 que vimos empleaban en el cálculo de áreas, lo cual supone un error considerable que nos lleva a pensar en el empleo de métodos empíricos para llegar a tales conclusiones, puesto que lo que sí podemos afirmar es que no se empleaba  $\pi$  como constante, por lo que hemos de deducir que tampoco se conocía su relación con el perímetro o el área del círculo.

Sin duda alguna la regla más importante, por su precisión, es la referida al cálculo del volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada. El problema es el número 14 del papiro de Moscú. La fórmula, como es de suponer, no aparece en el papiro, pero se calcula el volumen exacto. Si empleamos una notación moderna la fórmula es la siguiente:

$h$  = altura  $a, b$  = lados, entonces tenemos  $V = h/3 ( a^2 + b^2 +ab)$ .

Según el papiro de Moscú el volumen de un tronco de pirámide de bases 4 y 2 y altura 6 es 56. Lo curioso es que el escriba resuelve el problema aplicando los pasos que nos llevan a la fórmula anterior. Para ver la resolución exacta que da, consulta el capítulo dedicado al papiro de Moscú. Si se considera  $b=0$  se obtiene la fórmula para calcular el volumen de una pirámide, tal y como aparece representada en el contrato de Edfú. No se sabe cómo pudieron llegar a estos resultados, se ha afirmado que podría tener su origen en métodos experimentales, pero desde luego no es un método que resulte fácil. Para el cálculo del volumen del tronco parece más viable que descompusieran, al menos mentalmente, el tronco en figuras más sencillas como paralelepípedos, prismas o pirámides, que a su vez se descomponen en bloques rectangulares que podrían llevar a la fórmula, pero ciertamente no hay nada que lo demuestre y tampoco parece que el uso de una geometría basada en descomposiciones de figuras más sencillas prosperase en Egipto, y la única prueba está reflejada en los cálculos de áreas de ciertos triángulos y trapecios, como ya hemos visto.

## Trigonometría.

Aunque no es apropiado hablar de trigonometría en el ámbito general de la matemática egipcia, en el papiro Rhind aparecen una trigonometría rudimentaria y una pequeña teoría de triángulos semejantes. Así como en lo relativo a la aritmética o la geometría tenemos diferentes fuentes, aunque sean escasas, de trigonometría sólo disponemos del problema 56 del papiro Rhind.

Si contemplamos las grandes edificaciones que llevaron a cabo los egipcios, fundamentalmente las pirámides, hay que concluir que disponían de algún mecanismo trigonométrico para resolver ciertos problemas de construcción. Un problema de ingeniería básico era el mantener la pendiente uniforme en cada una de las caras, y a su vez la misma en las 4 caras. Quizás esta necesidad les llevó a

emplear lo que denominaron "seqt", equivalente a lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada.

En mediciones verticales empleaban como unidad el "codo" y en horizontales la "mano", que equivalía a  $1/7$  del codo. Tal como aparece en el problema 56 del papiro de Ahmes en el que se pide calcular el seqt de una pirámide de 250 "cubits" de altura y 360 de lado, sería  $5 \frac{1}{25}$  manos por codo (la resolución exacta aparece en el Apéndice I).

En el caso de la pirámide de Jufú (Queope) el seqt es  $5 \frac{1}{2}$  manos por codo.